

O Diabo Está nos Detalhes: uma Análise da  
Quebra da Assinatura Digital do PlayStation 3  
Conferência CAOS 2018

**Prof. Luis Menasché Schechter**  
luisms@dcc.ufrj.br

Universidade Federal do Rio de Janeiro

5 de Outubro de 2018

# Introdução

- ▶ Nesta apresentação, apresentamos uma falha em um detalhe da implementação do esquema de assinatura digital do videogame PlayStation 3.
- ▶ Apesar da falha estar em um pequeno detalhe da implementação, ela permitiu a quebra completa do esquema de assinatura digital.
- ▶ Sendo assim, esta apresentação tem também o objetivo de alertar, através da apresentação de um caso concreto, um ponto importante em segurança da informação: muitos problemas de segurança são causados não por falhas nas especificações dos protocolos utilizados, mas por pequenos desvios (involuntários) em alguns pontos de sua implementação.

## Visão Geral

- ▶ Em dezembro de 2010, o esquema de assinatura digital dos aplicativos (jogos, em sua maioria) que rodam no PlayStation 3 da Sony foi quebrado por um grupo de hackers europeus chamado *fail0verflow*.
- ▶ O grupo apresentou a quebra no congresso “27th Chaos Communication Congress” em Berlim, em 29/12/2010.
- ▶ Após a exibição, ficou claro que a quebra foi resultado muito mais de um erro em um detalhe da implementação por parte da Sony do que de qualquer habilidade extraordinária por parte dos hackers.

## Visão Geral (2)

- ▶ O algoritmo de assinatura digital utilizado pela Sony é o DSA baseado em Curvas Elípticas.
- ▶ O DSA é um algoritmo de assinatura digital baseado em grupos, aparentado do algoritmo El Gamal.
- ▶ Neste caso particular, o grupo utilizado é um grupo obtido a partir de uma Curva Elíptica.
- ▶ O erro cometido pela Sony não surge de uma implementação errada da parte relativa às Curvas Elípticas.
- ▶ Ele também não surge de uma implementação errada do algoritmo DSA.
- ▶ Este é um erro muito mais fundamental que afeta qualquer esquema de assinatura baseado no El Gamal, seja qual for o grupo utilizado.

# Hipótese Simplificadora

- ▶ Vamos descartar o uso de Curvas Elípticas e do algoritmo DSA e exibir o erro de implementação cometido pela Sony através do estudo do algoritmo de assinatura digital El Gamal tradicional.

# Criptografia e Assinatura Digital

- ▶ Criptografia:
  - ▶ Alice quer enviar uma mensagem criptografada para Bernardo.
  - ▶ Bernardo possui uma chave pública de codificação e uma chave privada de decodificação.
  - ▶ Qualquer um (incluindo Alice) pode utilizar a chave pública de Bernardo para codificar mensagens destinadas a ele antes de enviá-las.
  - ▶ Apenas Bernardo pode decodificar (com sua chave privada) tais mensagens e acessar seu conteúdo original.
- ▶ Assinatura Digital:
  - ▶ Alice quer enviar uma mensagem assinada para Bernardo.
  - ▶ Alice possui uma chave privada de assinatura e uma chave pública de verificação.
  - ▶ Qualquer um (incluindo Bernardo) pode utilizar a chave pública de Alice para verificar a assinatura ao receber mensagens enviadas por ela.
  - ▶ Apenas Alice pode assinar corretamente (com sua chave privada) as mensagens.

# Conceitos Básicos da Assinatura Digital El Gamal



- ▶ Desenvolvida pelo egípcio Taher El Gamal.
- ▶ É um método baseado no uso de grupos finitos cíclicos.
- ▶ Na versão tradicional do algoritmo, utiliza-se o conjunto

$$U(p) = \{1, 2, 3, \dots, p - 1\},$$

sendo  $p$  primo, com operações de produto e potenciação módulo  $p$ .

- ▶ Uma operação módulo  $p$  reduz os resultados maiores do que  $p - 1$  ao resto da divisão deste resultado por  $p$ .

## Conceitos Básicos da Assinatura Digital El Gamal (2)

- ▶ Pelo *Teorema da Raiz Primitiva*, como  $p$  é primo, existe pelo menos um elemento  $g \in U(p)$  tal que o conjunto  $U(p)$  pode ser escrito como

$$U(p) = \{1, g, g^2, g^3, \dots, g^{p-2}\},$$

isto é, para qualquer elemento  $h \in U(p)$ , existe um expoente  $x$  no intervalo  $0 \leq x \leq p - 2$  tal que  $h \equiv g^x \pmod{p}$ .

- ▶  $g$  é chamado de *gerador* do grupo cíclico  $U(p)$ .
- ▶ O *Problema do Logaritmo Discreto* consiste justamente em, dados  $g$ ,  $h$  e  $p$ , determinar o valor do expoente  $x$  no intervalo acima tal que  $g^x \equiv h \pmod{p}$ .
- ▶ A resolução deste problema possui alta complexidade computacional no conjunto  $U(p)$ , quando  $p$  é grande.
- ▶ A segurança da assinatura El Gamal está baseada na dificuldade de resolução deste problema.



# Variantes da Assinatura Digital El Gamal

- ▶ Possível Variante #1: utilizar outros grupos, que não sejam da forma  $U(p)$ .
  - ▶ Uma alternativa popular é a utilização de grupos construídos a partir de Curvas Elípticas.
- ▶ Possível Variante #2: utilizar estruturas de grupos mais complexas.
  - ▶ O método DSA realiza cálculos utilizando um par de grupos relacionados entre si.

# Procedimentos da Assinatura El Gamal

- ▶ Geração do par de chaves:
  1. Seja  $p$  um primo e  $g$  um gerador do grupo cíclico  $U(p)$ .
  2. Selecione um número aleatório  $1 < a < p - 1$ .
  3. Calcule  $y \equiv g^a$  em  $U(p)$  ( $y$  é a forma reduzida de  $g^a$  módulo  $p$ ).
  4. Os parâmetros públicos da implementação são  $p$  e  $g$ .
  5. A chave pública de verificação é  $y$ .
  6. A chave privada de assinatura é  $a$ .
- ▶ Para obter a chave privada a partir da chave pública é necessário resolver o problema do logaritmo discreto.

## Procedimentos da Assinatura El Gamal (2)

► Assinatura:

1. Seja  $m$  uma mensagem binária (no alfabeto  $\{0, 1\}$ ) a ser assinada e  $a$  a chave privada de assinatura.
2. Seja  $h : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{Z}_p$  uma *função de hash*, que também é um parâmetro público da implementação.
3. Selecione um número aleatório  $1 \leq k \leq p - 2$  tal que  $\text{mdc}(k, p - 1) = 1$ .
4. Calcule  $r \equiv g^k \pmod{p}$ .
5. Calcule o inverso de  $k$  módulo  $p - 1$  (denotado por  $k^{-1}$ ).
6. Calcule  $s \equiv k^{-1} * (h(m) - ar) \pmod{p - 1}$ .
7. A assinatura para  $m$  é o par  $(r, s)$ .

## Procedimentos da Assinatura El Gamal (3)

► Verificação:

1. Seja  $y$  a chave de verificação,  $m$  a mensagem e  $(r, s)$  a assinatura a ser verificada.
2. Verifique que  $1 \leq r \leq p - 1$ . Senão, rejeite a assinatura.
3. Calcule  $v_1 \equiv y^r * r^s \pmod{p}$ .
4. Calcule  $h(m)$  e  $v_2 \equiv g^{h(m)} \pmod{p}$ .
5. Aceite a assinatura se e somente se  $v_1 = v_2$ .

# Por que o processo de verificação funciona?

Inicialmente,

$v_1$

## Por que o processo de verificação funciona?

Inicialmente,

$$v_1 \equiv y^r * r^s$$

## Por que o processo de verificação funciona?

Inicialmente,

$$v_1 \equiv y^r * r^s \equiv (g^a)^r * r^s$$

## Por que o processo de verificação funciona?

Inicialmente,

$$v_1 \equiv y^r * r^s \equiv (g^a)^r * r^s \equiv g^{ar} * r^s$$



## Por que o processo de verificação funciona?

Inicialmente,

$$v_1 \equiv y^r * r^s \equiv (g^a)^r * r^s \equiv g^{ar} * r^s \equiv g^{ar} * (g^k)^s$$

## Por que o processo de verificação funciona?

Inicialmente,

$$v_1 \equiv y^r * r^s \equiv (g^a)^r * r^s \equiv g^{ar} * r^s \equiv g^{ar} * (g^k)^s \equiv g^{ar} * g^{ks}$$

## Por que o processo de verificação funciona?

Inicialmente,

$$\begin{aligned}v_1 &\equiv y^r * r^s \equiv (g^a)^r * r^s \equiv g^{ar} * r^s \equiv g^{ar} * (g^k)^s \equiv g^{ar} * g^{ks} \equiv \\ &\equiv g^{ar+ks} \pmod{p}\end{aligned}$$

## Por que o processo de verificação funciona?

Inicialmente,

$$\begin{aligned}v_1 &\equiv y^r * r^s \equiv (g^a)^r * r^s \equiv g^{ar} * r^s \equiv g^{ar} * (g^k)^s \equiv g^{ar} * g^{ks} \equiv \\ &\equiv g^{ar+ks} \pmod{p}\end{aligned}$$

Temos

$$s \equiv k^{-1} * (h(m) - ar) \pmod{p - 1}.$$

## Por que o processo de verificação funciona?

Inicialmente,

$$\begin{aligned}v_1 &\equiv y^r * r^s \equiv (g^a)^r * r^s \equiv g^{ar} * r^s \equiv g^{ar} * (g^k)^s \equiv g^{ar} * g^{ks} \equiv \\ &\equiv g^{ar+ks} \pmod{p}\end{aligned}$$

Temos

$$s \equiv k^{-1} * (h(m) - ar) \pmod{p - 1}.$$

Logo,

$$ks \equiv (h(m) - ar) \pmod{p - 1},$$

## Por que o processo de verificação funciona?

Inicialmente,

$$\begin{aligned}v_1 &\equiv y^r * r^s \equiv (g^a)^r * r^s \equiv g^{ar} * r^s \equiv g^{ar} * (g^k)^s \equiv g^{ar} * g^{ks} \equiv \\ &\equiv g^{ar+ks} \pmod{p}\end{aligned}$$

Temos

$$s \equiv k^{-1} * (h(m) - ar) \pmod{p - 1}.$$

Logo,

$$ks \equiv (h(m) - ar) \pmod{p - 1},$$

o que implica

$$ks + ar \equiv h(m) \pmod{p - 1}.$$

## Por que o processo de verificação funciona?

Inicialmente,

$$\begin{aligned}v_1 &\equiv y^r * r^s \equiv (g^a)^r * r^s \equiv g^{ar} * r^s \equiv g^{ar} * (g^k)^s \equiv g^{ar} * g^{ks} \equiv \\ &\equiv g^{ar+ks} \pmod{p}\end{aligned}$$

Temos

$$s \equiv k^{-1} * (h(m) - ar) \pmod{p - 1}.$$

Logo,

$$ks \equiv (h(m) - ar) \pmod{p - 1},$$

o que implica

$$ks + ar \equiv h(m) \pmod{p - 1}.$$

Sem a congruência, temos

$$ks + ar = h(m) + (p - 1) * l.$$

## Por que o processo de verificação funciona? (2)

Assim,

$v_1$



## Por que o processo de verificação funciona? (2)

Assim,

$$v_1 \equiv g^{ar+ks}$$

## Por que o processo de verificação funciona? (2)

Assim,

$$v_1 \equiv g^{ar+ks} \equiv g^{h(m)+(p-1)*l}$$

## Por que o processo de verificação funciona? (2)

Assim,

$$v_1 \equiv g^{ar+ks} \equiv g^{h(m)+(p-1)*l} \equiv g^{h(m)} * g^{(p-1)*l}$$

## Por que o processo de verificação funciona? (2)

Assim,

$$\begin{aligned}v_1 &\equiv g^{ar+ks} \equiv g^{h(m)+(p-1)*l} \equiv g^{h(m)} * g^{(p-1)*l} \equiv \\ &\equiv g^{h(m)} * (g^{p-1})^l \pmod{p}\end{aligned}$$

## Por que o processo de verificação funciona? (2)

Assim,

$$\begin{aligned}v_1 &\equiv g^{ar+ks} \equiv g^{h(m)+(p-1)*l} \equiv g^{h(m)} * g^{(p-1)*l} \equiv \\ &\equiv g^{h(m)} * (g^{p-1})^l \pmod{p}\end{aligned}$$

Devido a um resultado conhecido como *Pequeno Teorema de Fermat*, temos

$$g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

## Por que o processo de verificação funciona? (2)

Assim,

$$\begin{aligned}v_1 &\equiv g^{ar+ks} \equiv g^{h(m)+(p-1)*l} \equiv g^{h(m)} * g^{(p-1)*l} \equiv \\ &\equiv g^{h(m)} * (g^{p-1})^l \pmod{p}\end{aligned}$$

Devido a um resultado conhecido como *Pequeno Teorema de Fermat*, temos

$$g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Assim,

$v_1$

## Por que o processo de verificação funciona? (2)

Assim,

$$\begin{aligned}v_1 &\equiv g^{ar+ks} \equiv g^{h(m)+(p-1)*l} \equiv g^{h(m)} * g^{(p-1)*l} \equiv \\ &\equiv g^{h(m)} * (g^{p-1})^l \pmod{p}\end{aligned}$$

Devido a um resultado conhecido como *Pequeno Teorema de Fermat*, temos

$$g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Assim,

$$v_1 \equiv g^{h(m)} * (g^{p-1})^l$$

## Por que o processo de verificação funciona? (2)

Assim,

$$\begin{aligned}v_1 &\equiv g^{ar+ks} \equiv g^{h(m)+(p-1)*l} \equiv g^{h(m)} * g^{(p-1)*l} \equiv \\ &\equiv g^{h(m)} * (g^{p-1})^l \pmod{p}\end{aligned}$$

Devido a um resultado conhecido como *Pequeno Teorema de Fermat*, temos

$$g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Assim,

$$v_1 \equiv g^{h(m)} * (g^{p-1})^l \equiv g^{h(m)} * (1)^l$$



## Por que o processo de verificação funciona? (2)

Assim,

$$\begin{aligned}v_1 &\equiv g^{ar+ks} \equiv g^{h(m)+(p-1)*l} \equiv g^{h(m)} * g^{(p-1)*l} \equiv \\ &\equiv g^{h(m)} * (g^{p-1})^l \pmod{p}\end{aligned}$$

Devido a um resultado conhecido como *Pequeno Teorema de Fermat*, temos

$$g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Assim,

$$v_1 \equiv g^{h(m)} * (g^{p-1})^l \equiv g^{h(m)} * (1)^l \equiv g^{h(m)}$$

## Por que o processo de verificação funciona? (2)

Assim,

$$\begin{aligned}v_1 &\equiv g^{ar+ks} \equiv g^{h(m)+(p-1)*l} \equiv g^{h(m)} * g^{(p-1)*l} \equiv \\ &\equiv g^{h(m)} * (g^{p-1})^l \pmod{p}\end{aligned}$$

Devido a um resultado conhecido como *Pequeno Teorema de Fermat*, temos

$$g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Assim,

$$v_1 \equiv g^{h(m)} * (g^{p-1})^l \equiv g^{h(m)} * (1)^l \equiv g^{h(m)} \equiv v_2 \pmod{p}.$$

## Segurança da Assinatura El Gamal

- ▶ É fundamental que, a cada nova mensagem que vá ser assinada, um novo valor aleatório de  $k$  seja gerado. Utilizar o mesmo  $k$  para diversas mensagens torna o sistema muito frágil.
- ▶ Caso nenhuma função hash seja utilizada, abre-se uma brecha para a geração de assinaturas falsas.
- ▶ Caso o passo 2 da verificação da assinatura não seja feito, abre-se outra brecha para a geração de assinaturas falsas.
- ▶ Finalmente, precisa-se escolher um primo  $p$  grande, pois com  $p$  pequeno a resolução do problema do logaritmo discreto torna-se realizável na prática e pode-se obter a chave privada diretamente da chave pública.

# A Assinatura Digital no PlayStation

- ▶ No caso do PlayStation, não estamos interessados em assinar mensagens que irão trafegar em uma rede.
- ▶ Estamos interessados em assinar softwares produzidos para serem executados no console PlayStation.
- ▶ A Sony cria um par de chaves (chave de assinatura (privada) / chave de verificação (pública)) e grava a chave de verificação junto com o algoritmo de verificação de assinaturas no hardware ou no firmware do console.
- ▶ Todo software produzido para o PlayStation precisa ser “autorizado” pela Sony para que ele possa ser executado no console.
- ▶ Esta “autorização” consiste em anexar ao código do software uma assinatura válida para este código com a chave privada que é mantida em propriedade da Sony.

## A Assinatura Digital no PlayStation (2)

- ▶ Quando qualquer software é carregado no console, o console executa sobre o código do software o algoritmo de verificação de assinatura.
- ▶ Caso a assinatura seja aceita, o software roda normalmente. Caso contrário, o software não é autorizado pela Sony e a execução é abortada.
- ▶ Para todos os efeitos da nossa discussão, podemos considerar que o algoritmo de assinatura digital utilizado no PlayStation 3 é o El Gamal.
- ▶ Caso outras pessoas ou entidades fora da Sony obtenham a chave privada de assinatura, elas podem assinar qualquer software livremente, de maneira que ele seja executado sem problemas no console.
- ▶ Isto permitiria a execução de software pirata, de software homebrew e até mesmo o uso de um console PlayStation como um computador Linux.

# O Erro da Sony

## O Erro da Sony

- ▶ **A Sony não utilizou valores aleatórios distintos para o parâmetro  $k$  em cada processo de assinatura. Ela utilizou sempre o mesmo valor de  $k$ .**

## O Erro da Sony

- ▶ **A Sony não utilizou valores aleatórios distintos para o parâmetro  $k$  em cada processo de assinatura. Ela utilizou sempre o mesmo valor de  $k$ .**
- ▶ Handbook of Applied Cryptography: “A different  $k$  must be selected for each message signed; otherwise, the private key can be determined with high probability”.



## O Erro da Sony

- ▶ **A Sony não utilizou valores aleatórios distintos para o parâmetro  $k$  em cada processo de assinatura. Ela utilizou sempre o mesmo valor de  $k$ .**
- ▶ Handbook of Applied Cryptography: “A different  $k$  must be selected for each message signed; otherwise, the private key can be determined with high probability”.
- ▶ Wikipedia (ElGamal Signature Scheme): “The signer must be careful to choose a different  $k$  uniformly at random for each signature and to be certain that  $k$ , or even partial information about  $k$ , is not leaked. Otherwise, an attacker may be able to deduce the secret key  $x$  with reduced difficulty, perhaps enough to allow a practical attack. In particular, if two messages are sent using the same value of  $k$  and the same key, then an attacker can compute  $x$  directly.”

## O Erro da Sony (2)

- ▶ “A Public Key Cryptosystem and a Signature Scheme Based on Discrete Logarithms” (artigo original de T. El Gamal, **1985**): “If any  $k$  is used twice in the signing, then the system of equations is uniquely determined and  $x$  can be recovered. So for the system to be secure, any value of  $k$  should never be used twice.”

## O Erro da Sony (2)

- ▶ “A Public Key Cryptosystem and a Signature Scheme Based on Discrete Logarithms” (artigo original de T. El Gamal, **1985**): “If any  $k$  is used twice in the signing, then the system of equations is uniquely determined and  $x$  can be recovered. So for the system to be secure, any value of  $k$  should never be used twice.”
- ▶ Aparentemente, a Sony não sabia que utilizar o mesmo valor de  $k$  repetidas vezes geraria uma fragilidade no sistema.
- ▶ Vamos então mostrar como obter a chave privada de assinatura  $a$  se temos a assinatura de duas mensagens distintas que foram geradas com o mesmo parâmetro  $k$ .
- ▶ As contas envolvidas são extremamente elementares. Ou seja, esta falha permite a quebra do sistema em pouco tempo e sem nenhuma necessidade especial de processamento pesado.

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura

- ▶ Parâmetros públicos:  $h$ ,  $g$  e  $p$ .

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura

- ▶ Parâmetros públicos:  $h$ ,  $g$  e  $p$ .
- ▶ Parâmetro  $k$  igual para duas mensagens.

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura

- ▶ Parâmetros públicos:  $h$ ,  $g$  e  $p$ .
- ▶ Parâmetro  $k$  igual para duas mensagens.
- ▶ Mensagens:  $m_1$  e  $m_2$ .

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura

- ▶ Parâmetros públicos:  $h$ ,  $g$  e  $p$ .
- ▶ Parâmetro  $k$  igual para duas mensagens.
- ▶ Mensagens:  $m_1$  e  $m_2$ .
- ▶ Assinatura de  $m_1$ :

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura

- ▶ Parâmetros públicos:  $h$ ,  $g$  e  $p$ .
- ▶ Parâmetro  $k$  igual para duas mensagens.
- ▶ Mensagens:  $m_1$  e  $m_2$ .
- ▶ Assinatura de  $m_1$ :

$$r \equiv g^k \pmod{p},$$



## Obtendo a Chave Privada de Assinatura

- ▶ Parâmetros públicos:  $h$ ,  $g$  e  $p$ .
- ▶ Parâmetro  $k$  igual para duas mensagens.
- ▶ Mensagens:  $m_1$  e  $m_2$ .
- ▶ Assinatura de  $m_1$ :

$$r \equiv g^k \pmod{p},$$

$$s_1 \equiv k^{-1}(h(m_1) - ar) \pmod{p-1}.$$

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura

- ▶ Parâmetros públicos:  $h$ ,  $g$  e  $p$ .
- ▶ Parâmetro  $k$  igual para duas mensagens.
- ▶ Mensagens:  $m_1$  e  $m_2$ .
- ▶ Assinatura de  $m_1$ :

$$r \equiv g^k \pmod{p},$$

$$s_1 \equiv k^{-1}(h(m_1) - ar) \pmod{p-1}.$$

- ▶ Assinatura de  $m_2$ :

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura

- ▶ Parâmetros públicos:  $h$ ,  $g$  e  $p$ .
- ▶ Parâmetro  $k$  igual para duas mensagens.
- ▶ Mensagens:  $m_1$  e  $m_2$ .
- ▶ Assinatura de  $m_1$ :

$$r \equiv g^k \pmod{p},$$

$$s_1 \equiv k^{-1}(h(m_1) - ar) \pmod{p-1}.$$

- ▶ Assinatura de  $m_2$ :

$$r \equiv g^k \pmod{p},$$

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura

- ▶ Parâmetros públicos:  $h$ ,  $g$  e  $p$ .
- ▶ Parâmetro  $k$  igual para duas mensagens.
- ▶ Mensagens:  $m_1$  e  $m_2$ .
- ▶ Assinatura de  $m_1$ :

$$r \equiv g^k \pmod{p},$$

$$s_1 \equiv k^{-1}(h(m_1) - ar) \pmod{p-1}.$$

- ▶ Assinatura de  $m_2$ :

$$r \equiv g^k \pmod{p},$$

$$s_2 \equiv k^{-1}(h(m_2) - ar) \pmod{p-1}.$$

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura (2)

Temos então

$$ks_1 \equiv h(m_1) - ar \pmod{p-1}$$

e

$$ks_2 \equiv h(m_2) - ar \pmod{p-1}.$$

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura (2)

Temos então

$$ks_1 \equiv h(m_1) - ar \pmod{p-1}$$

e

$$ks_2 \equiv h(m_2) - ar \pmod{p-1}.$$

Assim,

$$k(s_1 - s_2) \equiv h(m_1) - h(m_2) \pmod{p-1}.$$

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura (2)

Temos então

$$ks_1 \equiv h(m_1) - ar \pmod{p-1}$$

e

$$ks_2 \equiv h(m_2) - ar \pmod{p-1}.$$

Assim,

$$k(s_1 - s_2) \equiv h(m_1) - h(m_2) \pmod{p-1}.$$

Se  $\text{mdc}(s_1 - s_2, p - 1) = 1$ , podemos calcular  $(s_1 - s_2)^{-1}$  e então temos

$$k \equiv (s_1 - s_2)^{-1}(h(m_1) - h(m_2)) \pmod{p-1}.$$

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura (3)

Com o valor de  $k$  encontrado, temos

$$ar \equiv h(m_i) - ks_i \pmod{p-1}, \text{ para } i = 1, 2.$$



## Obtendo a Chave Privada de Assinatura (3)

Com o valor de  $k$  encontrado, temos

$$ar \equiv h(m_i) - ks_i \pmod{p-1}, \text{ para } i = 1, 2.$$

Se  $\text{mdc}(r, p-1) = 1$ , podemos calcular  $r^{-1}$  e então temos o valor da chave privada

$$a \equiv r^{-1}(h(m_i) - ks_i) \pmod{p-1}.$$

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura (3)

Com o valor de  $k$  encontrado, temos

$$ar \equiv h(m_i) - ks_i \pmod{p-1}, \text{ para } i = 1, 2.$$

Se  $\text{mdc}(r, p-1) = 1$ , podemos calcular  $r^{-1}$  e então temos o valor da chave privada

$$a \equiv r^{-1}(h(m_i) - ks_i) \pmod{p-1}.$$

Mesmo que  $\text{mdc}(r, p-1)$  seja diferente de 1 e não possamos obter o valor da chave privada, ainda temos informação suficiente para gerar assinaturas que serão aceitas pelo algoritmo de verificação.

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura (4)

- ▶ Como temos o valor de  $k$  e o parâmetro  $g$  é público, temos o valor de

$$r \equiv g^k \pmod{p}$$

e o valor de  $k^{-1}$ .

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura (4)

- ▶ Como temos o valor de  $k$  e o parâmetro  $g$  é público, temos o valor de

$$r \equiv g^k \pmod{p}$$

e o valor de  $k^{-1}$ .

- ▶ Podemos também calcular o valor de

$$ar \equiv h(m_i) - ks_i \pmod{p - 1}.$$

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura (4)

- ▶ Como temos o valor de  $k$  e o parâmetro  $g$  é público, temos o valor de

$$r \equiv g^k \pmod{p}$$

e o valor de  $k^{-1}$ .

- ▶ Podemos também calcular o valor de

$$ar \equiv h(m_i) - ks_i \pmod{p-1}.$$

- ▶ Se queremos assinar uma mensagem  $m^*$ , precisamos obter um valor  $s^*$  de forma que o par  $(r, s^*)$  seja uma assinatura válida para  $m^*$  de acordo com a chave privada de assinatura  $a$  (que não sabemos exatamente qual é).

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura (4)

- ▶ Como temos o valor de  $k$  e o parâmetro  $g$  é público, temos o valor de

$$r \equiv g^k \pmod{p}$$

e o valor de  $k^{-1}$ .

- ▶ Podemos também calcular o valor de

$$ar \equiv h(m_i) - ks_i \pmod{p-1}.$$

- ▶ Se queremos assinar uma mensagem  $m^*$ , precisamos obter um valor  $s^*$  de forma que o par  $(r, s^*)$  seja uma assinatura válida para  $m^*$  de acordo com a chave privada de assinatura  $a$  (que não sabemos exatamente qual é).
- ▶ Pela equação do algoritmo de geração da assinatura, temos que

$$s^* \equiv k^{-1}(h(m^*) - ar).$$

## Obtendo a Chave Privada de Assinatura (5)

- ▶ Como conhecemos  $k^{-1}$ ,  $h$  e o valor do produto  $ar$ , podemos calcular  $s^*$ .
- ▶ Temos então uma assinatura válida para a mensagem  $m^*$ .

# Conclusões

- ▶ Um hacker que não é ligado ao grupo *fail0verflow* calculou, após a apresentação do congresso, a chave privada de assinatura do PlayStation 3 e a publicou em uma página na Internet.
- ▶ A Sony processou todos os hackers envolvidos, mas não realizou auto-crítica a respeito de seu erro de implementação.
- ▶ Como corrigir completamente o problema (sob o ponto de vista da Sony)?



O Diabo Está nos Detalhes: uma Análise da  
Quebra da Assinatura Digital do PlayStation 3  
Conferência CAOS 2018

**Prof. Luis Menasché Schechter**  
luisms@dcc.ufrj.br

Universidade Federal do Rio de Janeiro

5 de Outubro de 2018